16/03/17.

Ορισμός: Η πράξη $* : X \times X \to X$ καλείται προσεταιριστική
$\iff \forall a,b,c \in X : a*(b*c) = (a*b)*c$.

Πρόταση: Έστω $*$ προσεταιριστική πράξη επί ενός συνόλου X και έστω $a_1,\dots,a_n$, $n \geq 1$. Τότε το στοιχείο $a_1 * \dots * a_n$ είναι μοναδικά καθορισμένο.

Απόδ: – Αν $n=1$ ή $n=2$ τότε δεν έχω να αποδείξω τίποτα.

– Αν $n=3$ τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από τον ορισμό.

– Επαγ. Υποθ.: Ο ισχυρισμός ισχύει για κ-το πλήθος στοιχεία του X, με $3 \leq \kappa \leq n-1$.

– Γενική Περίπτωση: Δύο τυχαίες ομαδοποιήσεις των $a_1,\dots,a_n$ για τον υπολογισμό του $a_1 * \dots * a_n$ εισάγοντας τις παρενθέσεις, είναι: $(a_1 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots * a_n) = A$
και $(a_1 * \dots * a_j) * (a_{j+1} * \dots * a_n) = B$, όπου $i, j \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i, j \leq n$

① Αν $i=j$ τότε προφανώς τα στοιχεία $(a_1 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots * a_n)$ και $(a_1 * \dots * a_j) * (a_{j+1} * \dots * a_n)$ ταυτίζονται.

② Αν $i \neq j$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $i < j$. Τότε:

$$A = \underbrace{(a_1 * \dots * a_i)}_{x} * \left(\underbrace{(a_{i+1} * \dots * a_j)}_{y} * \underbrace{(a_{j+1} * \dots * a_n)}_{z} \right) = x * (y * z)$$

$$B = \left(\underbrace{(a_1 * \dots * a_i)}_{x} * \underbrace{(a_{i+1} * \dots * a_j)}_{y} \right) * \underbrace{(a_j * \dots * a_n)}_{z} = (x * y) * z.$$

Τα στοιχεία x, y, z είναι μοναδικά καθορισμένα από την επαγωγική υπόθεση διότι εμπλέκονται λιγότερα από n-στοιχεία.
Από την προσεταιριστικότητα της πράξης έπεται ότι:
$A = x*(y*z) = (x*y)*z = B$.
Άρα το στοιχείο $a_1 * \dots * a_n$ είναι μοναδικά καθορισμένο.

Ορισμός: Ένα μη-κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια προσεταιριστική πράξη καλείται ημι-ομάδα.

Π.χ. ① Τα ζεύγη $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ είναι ημι-ομάδες. Όμοια με την πράξη του πολλαπλασιασμού.

② Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$\forall \alpha, b \in \mathbb{N}: \begin{cases} \alpha * b = \begin{cases} \min\{a,b\}, & \alpha \neq b \\ \alpha, & \alpha = b \end{cases} \\ \alpha *' b = \alpha \\ \alpha *'' b = \alpha * b + 2 \end{cases}$$

Έτσι

$$3 * 5 = 3$$
$$3 *' 5 = 3$$
$$3 *'' 5 = 3 * 5 + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$\left.\begin{array}{l} 3 *'' (5 *'' 7) = 3 *'' (5+2) = 3 *'' 7 = 3 + 2 = 5 \\ (3 *'' 5) *'' 7 = (3+2) *'' 7 = 5 *'' 7 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η πράξη $*'$ δεν είναι προσεταιριστική.

③ Αν $\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array}\right| \in \mathbb{R}^3$ τότε ορίζεται ένα νέο διάνυσμα $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Έτσι ορίζεται η πράξη $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η οποία δεν είναι προσεταιριστική.

④ $(M_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$: ημιομάδα όπου $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
$(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \cdot)$: −"− −"− −"− .

Παρατήρηση: Έστω X: σύνολο
− Αν $|X| = 2$ τότε ορίζονται επί του X 16 πράξεις εκ των οποίων 8 είναι προσεταιριστικές.

– Αν $|X|=3 \longrightarrow$ ορίζονται $3^{9} \simeq 19.683$ πράξεις εκ των οποίων 113 είναι προσεταιριστικές.

<u>Ορισμός</u>: Μία πράξη επί ενός συνόλου X, $*: X\times X \to X$ θα καλείται <u>μεταθετική</u> $\Leftrightarrow \forall \alpha, b \in X: \alpha * b = b * \alpha$.

Μεταθέσεις

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και έστω $S(X)=\{f: X\to X \mid f: 1\text{-}1 \text{ κ' επί}\}$
Επί του $S(X)$ ορίζεται η πράξη 'o' της σύνθεσης απεικ.:
$o: S(X)\times S(X) \longrightarrow S(X),\ (f,g) \longmapsto f\circ g$
Επειδή η σύνθεση απεικ. o είναι προσεταιριστική $\Rightarrow$
$\Rightarrow (S(X), o)$: ημιομάδα.

Η πράξη 'o' είναι μεταθετική στο $S(X) \Leftrightarrow |S(X)| \leq 2$
– Αν $|X|=1$ και έστω $X=\{x\}$ τότε $S(X)=\{Id_x\}$,
με $Id_x: X\to X$, $Id_x(x)=x$
και προφανώς η πράξη o είναι μεταθετική
– Αν $|X|=2 \Rightarrow X=\{x,y\}$. Τότε $Id_x \in S(X)$ και $Id_x = \begin{cases} x \longmapsto x \\ y \longmapsto y \end{cases}$
Έστω $f \in S(X)$. Τότε: $f(x) = \begin{cases} \to x \\ \to y \end{cases}$
• Αν $f(x)=x$, τότε $f(y) = \begin{cases} \to x \Rightarrow \text{άτοπο, διότι } f(x)=x=f(y) \Rightarrow f: 1\text{-}1 \Rightarrow x=y \Rightarrow \text{άτοπο αφού } |X|=2. \\ \to y \Rightarrow f \equiv Id \end{cases}$
• Αν $f(x)=y \Rightarrow f(y) = \begin{cases} y \Rightarrow \text{άτοπο όπως παραπάνω} \\ x \end{cases}$
Άρα $f(y)=x$ και τότε $f: \begin{cases} x \longmapsto y \\ y \longmapsto x \end{cases}$
Άρα $S(X)=\{Id_x, f\}$ και τότε προφανώς η o είναι μεταθετική επί του $S(X)$.

Έστω $|X| \geq 3$ και $x,y,z \in X$. Ορίζουμε απεικονίσεις επί του X:
$f: \begin{cases} x \longmapsto x \\ y \longmapsto z \\ z \longmapsto y \\ \alpha \longmapsto \alpha,\ \forall \alpha \neq x,y,z \end{cases}$: 1-1 κ' επί $\quad g: \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto y \\ z \longmapsto x \\ \alpha \longmapsto \alpha\ \forall \alpha \neq x,y,z \end{cases}$ 1-1 κ' επί $\Rightarrow f, g \in S(X)$.

$$f\circ g : \begin{cases} x \longmapsto y \\ y \longmapsto z \\ z \longmapsto x \end{cases} \qquad g\circ f : \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto x \\ z \longmapsto y \end{cases}$$

Άρα $f\circ g \neq g\circ f \Rightarrow \circ$ όχι μεταθετική.

<u>Ορισμός</u>: Κάθε 1-1 και επί απεικόνιση $f: X \to X$ θα καλείται μετάθεση του X, και τότε το ζεύγος $(S(X), \circ)$ καλείται η ημιομάδα μεταθέσεων επί του X.

- Αν $X = \{1, 2, \dots, n\}$ τότε το ζεύγος $S(X)$ θα καλείται η n-οστή συμμετρική ημιομάδα και θα γράφουμε $S(X) := S_n$

Έτσι αν ορίσουμε ότι μια ημιομάδα $(X, *)$ καλείται μεταθετική ημιομάδα $\Leftrightarrow *$: μεταθετική. Τότε S_n: μεταθετική $\Leftrightarrow n \leq 2$.

<u>Π.χ.</u> $(M_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$: μεταθετική

$(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ όχι μεταθετική γενικά.

↳ μεταθετική $\Leftrightarrow n=1$.

$(\Rightarrow)$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Downarrow$

$n = 1$